

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ 7.02.2025

CLASA a X-a

Problema I. (7 puncte)

Se consideră numerele $a = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$ și $b = \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

a) Arătați că $\sqrt{3+2\sqrt{2}} < \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$.

b) Arătați că $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ este număr natural.

prof. Balica Ioan, Inspectoratul Școlar Județean Cluj

Problema II. (7 puncte)

Fie a, b, c numere reale strict pozitive și diferite de 1.

Știind că numerele $x = 1 + \log_a b + \log_a c$, $y = 1 + \log_b c + \log_b a$ și $z = 1 + \log_c a + \log_c b$ sunt strict mai mari decât 0, arătați că $x > 1, y > 1$ și $z > 1$, pentru orice $a, b, c \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

prof. Mădălin Mitrofan, Colegiul Național „Emil Racoviță” Cluj-Napoca

Problema III. (7 puncte)

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$, diferite două câte două, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

Demonstrați că $\frac{1}{z_1^{2025}} + \frac{1}{z_2^{2025}} + \frac{1}{z_3^{2025}} = 1$.

prof. Radu Ielcean, Colegiul Național „Emil Racoviță” Cluj-Napoca

Problema IV. (7 puncte)

Fie numerele $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, care verifică relația $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$ și fie $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ imaginile lor în planul complex. Dacă $D(z_4)$ este simetricul ortocentrului triunghiului ABC față de latura BC, să se arate că are loc egalitatea:

$$2 \arg \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_1} = \arg \frac{z_2}{z_4}.$$

prof. Jecan Eugen și Găldean Alina, Colegiul Național „Andrei Mureșanu”, Dej